Gekoppelte Pendel (Eigenwertproblem)

(zum Teil nach *F. S. Crawford* – Berkeley Physics Course, Band 3: *Waves*, Kapitel 1.4 und W. Demtröder: *Experimentalphysik 1* (*Mechanik und Wärme*), Kapitel 11)

1. Experimentelle Anordnung, Ansatz

Zwei Körper gleicher Masse *M* gleiten auf einer horizontalen, reibungsfreien Unterlage. Sie werden wie in Abbildung 1 durch drei Spiralfedern gehalten. Die zwischen den Massen befindliche Feder hat die Federkonstante *D*, die beiden anderen Federn (Federkonstante *D'*) sind an ihren jeweils äußeren Enden fixiert. Bewegt sich einer der Körper von seiner Ruhelage aus nach links oder rechts, wird er durch die Federn wieder zurück in Richtung Ruhelage beschleunigt. Dabei schwingt

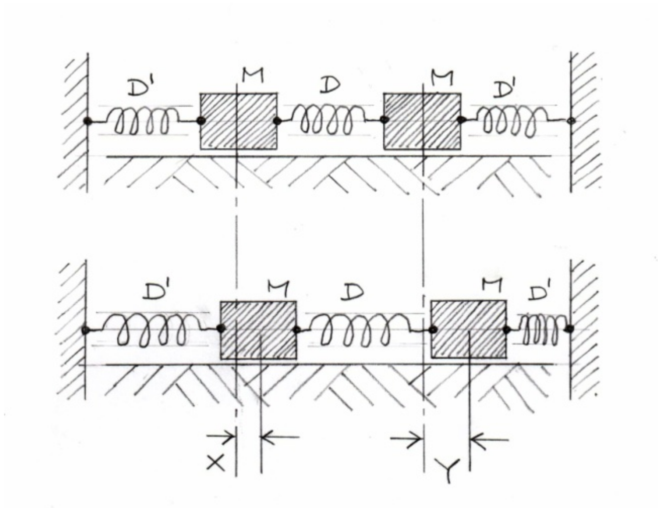

Abbildung 1 **Zwei gekoppelte Pendel, z. B. Gleiter auf einer Luftkissenbahn, die durch eine Spiralfeder (Federkonstante D) gekoppelt sind und außen von zwei weiteren Federn (Federkonstante D') gehalten werden. Oben: Ruhelage, unten: beide Federn ausgelenkt**

er wegen der Trägheit seiner Masse über die Ruhelage hinaus auf die jeweils andere Seite. Dort treten die Rückstellkräfte der Federn wieder in Aktion, sie wirken dieses Mal in umgekehrter Richtung zwingen ihn auch von dort wieder umzukehren – es entsteht eine Pendelbewegung oder kurz *Schwingung* um die Ruhelage. Allerdings keine reine harmonische Schwingung. Denn die Bewegungen der Pendelkörper sind wegen der Kopplung durch die mittlere Feder voneinander abhängig.

Das Weg-Zeit-Verhalten der Pendelkörper lässt sich trotz ihrer komplizierten Bewegung mathematisch beschreiben. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass es Bewegungen gibt, bei denen beide Körper mit derselben Frequenz schwingen – beispielsweise die Bewegung, bei der sie mit konstantem Abstand voneinander synchron nach links und rechts ausschwingen. In unserem Fall gibt es neben dieser gleichphasigen Relativbewegung noch eine synchron ablaufende gegenphasige Bewegung. Bei dieser bewegen sich die Körper synchron aufeinander zu oder voneinander weg. Nach diesen Schwingungen sucht man, indem man zunächst einmal voraussetzt, dass es sie gibt. Das klingt dreist, ist aber durchaus produktiv. Anschließend testet man, ob dieser „Ansatz” richtig war: Man setzt die Weg-Zeit-Funktionen der Schwingungen, von denen man annimmt, dass es sie gibt, in die Bewegungsgleichungen ein und prüft, ob sie diese erfüllen. Das soll jetzt geschehen.

Wir bezeichnen die Auslenkungen der Pendelkörper aus der Ruhelage mit x bzw. y (Abbildung 1). Ihre Bewegung wird dann nach *Newton* durch die Differenzialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= -D'x + D(y-x) \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= -D(y-x) - D'y \end{aligned}$$

beschrieben. Man erkennt unschwer, dass hier das *Hooke*'sche Gesetz angewandt wurde. Mit den Abkürzungen

$$(2)\qquad \frac{D'+D}{M} = a_{11},\quad \frac{-D}{M} = a_{12},\quad \frac{-D}{M} = a_{21},\quad \frac{D'+D}{M} = a_{22}$$

wird daraus

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a_{11}x - a_{12}y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -a_{21}x - a_{22}y \end{aligned} .$$

In unserer Anordnung sind die beiden Massen und die Federkonstanten der äußeren Federn gleich. Diese Symmetrie führt dazu, dass die Koeffizienten z. T. gleich sind ($a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$). Das würde die Rechnung vereinfachen. Wir machen aber zunächst keinen Gebrauch davon, um auch den Fall unsymmetrischer Masse-Federketten einzuschließen.

2. Normalschwingungen

Ohne ein besonderes physikalisches Experiment vor Augen zu haben, geben wir uns nun ein Gleichungssystem wie in (3) vor – zwei gekoppelte lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Wir suchen, wie schon angedeutet, Lösungen mit einer einzigen (gemeinsamen) Frequenz – und folgen dabei den Rechnungen in [1]). Der oben mit „dreist" bezeichnete Ansatz lautet, mathematisch formuliert:

$$(4)\qquad x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad y = B\cos(\omega t + \varphi) .$$

Dabei ist ω die (Kreis-)Frequenz der Schwingung und φ deren Phase. Mit A und B sind die Amplituden bezeichnet. Sie sind, wie auch ω, zunächst unbekannt. Mit diesem Ansatz folgt für die zweiten Ableitungen nach der Zeit

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y .$$

Setzt man diese in Gleichung (3) ein und bringt alle Terme auf die linke Seite, erhält man ein System linearer homogener Gleichungen in x und y:

$$(6)\qquad \begin{aligned} (a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y &= 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y &= 0 \end{aligned}$$

Aus jeder der beiden Gleichungen ergibt sich der Quotient y/x, und zwar zu

$$(7)\qquad \frac{y}{x} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}}\,, \qquad \frac{y}{x} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \qquad .$$

Da er in beiden Fällen die gleiche Größe repräsentiert, wird gefordert

$$\frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}$$

oder

$$(8)\qquad \left(\omega^2 - a_{11}\right)\left(\omega^2 - a_{22}\right) - a_{21}a_{12} = \left(\omega^2\right)^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\omega^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\,.$$

Das ist eine quadratische Gleichung in ω^2. Deren Lösungen nennen wir ω_1^2 und ω_2^2. Das heißt, setzen wir voraus, dass es Lösungen mit einer einzigen Frequenz für die Schwingung beider Massen gibt, dann gibt es genau zwei Frequenzen ω_1^2 und ω_2^2, die diese Bedingung erfüllen. Sie sind

$$(9)\qquad \begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{11} + a_{22}\right)^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{12}} \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{21}a_{12}} \end{aligned} \qquad .$$

Die Theorie sagt damit in der Tat zwei mögliche Schwingungszustände voraus, bei denen sich beide Körper mit derselben Frequenz bewegen. Das Experiment bestätigt diese Vorhersage. Die Schwingungszustände heißen *Normalschwingungen*, Normalschwingungs*moden* oder kurz *Moden*.

In unserem Ansatz (4) haben wir uns hinsichtlich der Amplituden A und B nicht festgelegt. Das war richtig, denn A und B unterliegen Gleichung (7) und können deshalb nicht völlig frei gewählt werden. Wir erhalten sie, indem wir in diese Gleichung die Lösungen ω_1^2 und ω_2^2 einsetzen. Für die Normalschwingung mit ω_1^2 ergibt sich

$$(10)\qquad \left(\frac{y}{x}\right)_1 = \left(\frac{B}{A}\right)_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

und in ähnlicher Weise für die Normalschwingung mit ω_2^2

$$(11)\qquad \left(\frac{y}{x}\right)_2 = \left(\frac{B}{A}\right)_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad .$$

Das heißt, Gleichung (7) bestimmt nicht die Amplituden an sich, wohl aber deren Verhältnis. Die Schwingungsamplitude einer der beiden Massen, beispielsweise A_1, kann man frei wählen, die Amplitude der jeweils anderen, hier B_1, ist dann durch Gleichung (10) festgelegt. Dasselbe gilt für die Normalschwingung mit ω_2^2, für diese ist Gleichung (11) zuständig.

3. Symmetrische Anordnung

Für unsere symmetrische Anordnung war $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = a_{21}$. In diesem Spezialfall gilt

$$\omega_{1,2}^2 = a_{11} \pm a_{12} \quad .$$

Setzt man M, D und D' nach Gleichung (2) ein, erhält man

$$(12) \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{D'}{M}} \qquad \text{und} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{D' + 2D}{M}}\,.$$

Die Frequenz ω_1 ist die der oben erwähnten, gleichphasigen Relativbewegung, bei der beide Pendelkörper mit zeitlich konstantem Abstand nach links und rechts ausschwingen. Die mittlere Feder (Federkonstante D) wird dabei weder gedehnt noch gestaucht, so dass sie keine Rückstellkraft entwickelt. Sie sollte daher keinen Beitrag zur Frequenz ω_1 liefern. Die Formeln in (12) zeigen, dass dies tatsächlich zutrifft. Es ist, als ob jede Masse nur an der jeweils äußeren Feder (Federkonstante D') befestigt ist und nur von dieser ihre Rückstellkraft erhält. Das werden wir im nachfolgenden Abschnitt bestätigen. Zur Frequenz ω_2 der zweiten Normalschwingung tragen offenbar alle drei Federn bei. Die zugehörige Schwingungsart ist, wie sich unten herausstellen wird, die schon genannte gegenphasige Relativbewegung, bei der sich die Pendelkörper synchron aufeinander zu oder voneinander weg bewegen.

Gleichungen (10) und (11) legen die Amplitudenverhältnisse der Normalschwingungen fest. In unserem symmetrischen Fall folgt

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\frac{D'}{M} - \frac{D'+D}{M}}{\frac{-D}{M}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{B_2}{A_2} = \frac{\frac{D'+2D}{M} - \frac{D'+D}{M}}{\frac{-D}{M}} = -1$$

Damit erhält man für die Normalschwingung mit ω_1 (Mode 1)

$$(13) \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{aligned}$$

und für die Normalschwingung mit ω_2 (Mode 2)

$$(14) \qquad \begin{aligned} x_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y_2(t) &= -A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\,.$$

Jetzt wird klar, dass die Normalschwingung mit der Frequenz ω_1 (Mode 1) tatsächlich die oben genannte gleichphasige Mode ist: Die Auslenkungen beider Pendelkörper folgen demselben zeitlichen Verlauf, es ist zu jeder Zeit $y_1 = x_1$. Im Übrigen würde man auch bei unterschiedlichen Amplituden von gleichphasigen Bewegungen sprechen, da das Argument der *cos*-Funktion für y_1 und x_1 gleich ist. Die Normalschwingung mit der Frequenz ω_2 (Mode 2) hingegen ist diejenige Schwingungsart, bei der sich beide Körper *gegeneinander* bewegen (die oben erwähnte gegenphasige Mode): Hat sich der eine um die Strecke x_2 von seiner Ruhelage aus nach links bewegt, ist der andere um die Strecke $y_2 = -x_2$ nach rechts ausgeschert. Das Minuszeichen lässt sich durch die Addition von 180° bzw. π im Argument des *cos*-Terms ersetzen. So geschrieben wird die Phasenverschiebung deutlich.

Soweit die Weg-Zeit-Gleichungen der beiden Normalschwingungen in der symmetrischen Anordnung. Die Schwingungen werden, wie schon angedeutet, tatsächlich beobachtet. In den meisten Fällen liegt aber weder die eine noch die andere Normalschwingung in reiner Form vor. Welche Gleichungen den „allgemeinen" Fall beschreiben, hat (wieder einmal) die Mathematik geklärt. Die behauptet und beweist: Jede Linearkombination der Normalschwingungen ist eine Lösung des allgemeinen Problems. Das heißt, jede Lösung x lässt sich schreiben als Summe von x_1 und x_2, jede Lösung y als Summe von y_1 und y_2, und zwar mit beliebigen Koeffizienten A_1 und A_2, allerdings unter Beachtung von (10) und (11). Die Bewegung der beiden Pendelkörper genügt daher den Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} .$$

Dabei werden die Konstanten A_1, A_2, φ_1 und φ_2 durch die Anfangsbedingungen $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$ und $\dot{y}(0)$ festgelegt (Der Punkt über den beiden letzten Buchstaben x bzw. y steht für die zeitliche Ableitung). Da $x(t)$ und $y(t)$ sich nur in den Vorzeichen der Summanden (der *cos*-Terme) unterscheiden, werden sie oft zu einem Vektor $\mathbf{x}(t)$ zusammengefasst:

$$(16)\qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) .$$

Die Vektorschreibweise und das quadratische Schema der Koeffizienten a_{ij} $(i, j = 1..2)$ in Gleichung (3) deuten an, dass bei den obigen Rechnungen die Regeln der Matrix- und Vektoralgebra anwendbar sind. Mehr dazu weiter unten.

In den Lehrbüchern werden neben den Normalschwingungen auch die sogenannten *Normalkoordinaten* behandelt. Man erhält sie durch einen „educated guess”: Gesucht wird eine Kombination der beiden Koordinaten x und y, die den Differenzialgleichungen in (3) genügt und diese gleichzeitig *entkoppelt*. Man erhält sie, indem man die Gleichungen einmal addiert, das andere Mal subtrahiert. Das führt zu

$$\begin{aligned} M\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= -D'(x + y) \\ M\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= -(D' + 2D)(x - y) \end{aligned} .$$

Bezeichnet man Summe und Differenz der Koordinaten mit ξ_+ bzw. ξ_-, also

$$\begin{aligned} \xi_+ &= x + y \\ \xi_- &= x - y \end{aligned} ,$$

dann ist

$$(17)\qquad \begin{aligned} M\ddot{\xi}_+ &= -D'\xi_+ \\ M\ddot{\xi}_- &= -(D' + 2D)\xi_- \end{aligned} .$$

Auch hier steht der Punkt für die zeitliche Ableitung der betreffenden Größe, der Doppelpunkt für die zweite Ableitung nach der Zeit. Jede Gleichung beschreibt jetzt, ohne auf die andere „Rücksicht” zu nehmen, das Zeitverhalten einer einzigen Größe. Das heißt, die Gleichungen sind entkoppelt. Damit sind die Größen ξ_+ und ξ_- die Normalkoordinaten im vorliegenden Fall; ξ_+ ist, bis auf den Faktor 2, die Koordinate des Schwerpunkts der beiden Pendelkörper, die Koordinate ξ_- deren Relativabstand. Die zugehörigen Frequenzen sind die, die schon in Gleichung (12) genannt wurden. Der Schwerpunkt bewegt sich daher mit der Frequenz ω_1, während die „innere” Bewegung mit der Frequenz ω_2 abläuft.

Sind die Amplituden der Normalschwingungen gleich, also $A_1 = A_2 = A$ in den Gleichungen (13) und (14), dann lassen sich die Schwingungen x und y schreiben als

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\left[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right] \\
&= 2A\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\
y(t) &= A\left[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right] \\
&= -2A\cdot\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)
\end{aligned}
.
$$

Ihr zeitlicher Verlauf ist in Abbildung 2 dargestellt (rot: $x(t)$, blau: $y(t)$). Es zeigt sich, dass die Schwingungsamplituden beider Pendelkörper in regelmäßiger Folge größer und kleiner werden, und zwar antizyklisch zur Amplitude des jeweils anderen Körpers. Dabei treten die beiden Frequenzen $\omega_2+\omega_1$ und $\omega_2-\omega_1$ in Erscheinung: Die Pendelkörper schwingen mit der höheren Frequenz $\omega_2+\omega_1$, und zwar so, dass die Hüllkurve ihrer Amplituden die Schwingung der niedrigeren Frequenz $\omega_2-\omega_1$ darstellt. Man spricht von einer *Schwebung* (engl. *beat*) mit der Schwebungsfrequenz

$$\omega_B = (\omega_2 - \omega_1)/2.$$

Die halbe Schwebungsperiode ist

$$\frac{T_B}{2} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} .$$

In dieser Zeit geht die Amplitude des einen Pendelkörpers vom Maximalwert auf den Wert Null zurück und steigt anschließend wieder bis zum Maximalwert an. Während dessen wächst die

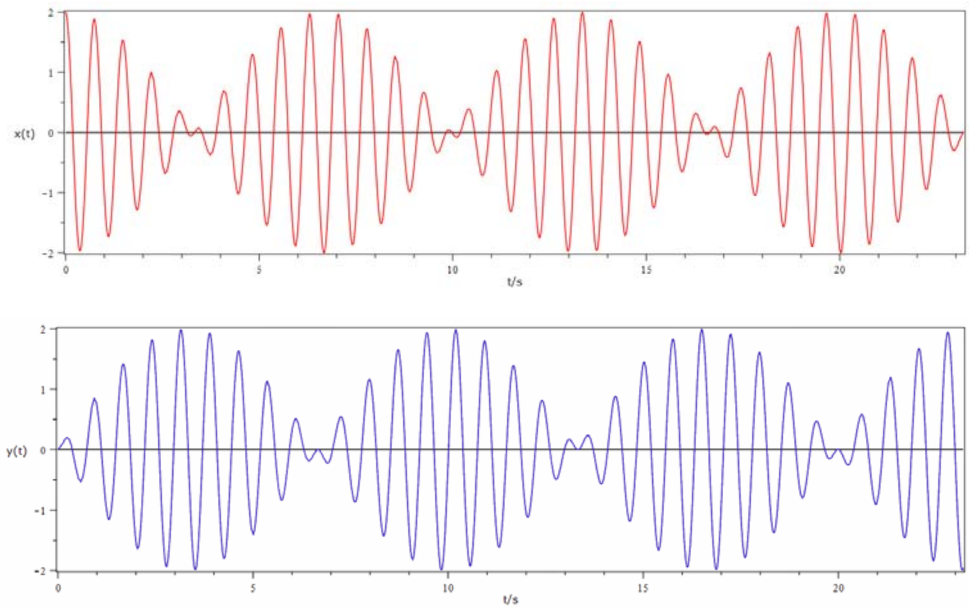

Abbildung 2 Schwingungsamplituden der gekoppelten Pendel, siehe Text

Amplitude des anderen Körpers vom Wert Null bis zum Maximalwert und fällt danach wieder bis zum Wert Null. Das heißt, $T_B/2$ ist die Zeit, in der die Energie vom ersten Pendelkörper auf den zweiten hin und wieder zurück übertragen wurde.

4. Matrixalgebra

In Gleichung (16) wurden $x(t)$ und $y(t)$ zu einem Vektor $\mathbf{x}(t)$ zusammengefasst und es wurde darauf hingewiesen, dass diese Schreibweise und das quadratische Schema der Koeffizienten a_{ij} $(i, j = 1..2)$ in Gleichung (3) nahelegen, von Anfang an den Formalismus der Matrix- und Vektoralgebra zu benutzen. Das ist in der Tat möglich – und damit kehren wir zu unserer allgemeinen Rechnung zurück. Gleichung (3) lässt sich nämlich umformen zu

$$(18) \qquad \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} .$$

Setzt man, wie oben, für x und y harmonisches Zeitverhalten (z. B. *cos*-Funktionen) voraus und macht Gebrauch von (5), folgt

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} .$$

Kürzt man die Matrix auf der linken Seite mit **A** ab (und den Vektor, wie oben schon geschehen, mit **x**), also

$$(19) \qquad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} ,$$

wird daraus

$$(20) \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{x} .$$

Aus dieser Schreibweise geht hervor, dass die möglichen Werte von ω^2 die *Eigenwerte* der Matrix **A** sind – also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von **A**. Das charakteristische Polynom erhält man, indem man zunächst Gleichung (20) mit Hilfe der Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

umformt. Multipliziere dazu die rechte Seite von links mit **E** und subtrahiere den Term $\omega^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$ auf beiden Seiten. Das führt zu

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} .$$

Nun weiß man, dass ein lineares homogenes Gleichungssystem genau dann nichttriviale Lösungen hat, wenn die Gleichungsdeterminante verschwindet. Die Lösungen sind also gegeben durch

$$\left| \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{E} \right| = 0$$

oder

$$(21)\qquad \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\omega^2 \end{vmatrix} = \left(a_{11}-\omega^2\right)\left(a_{22}-\omega^2\right) - a_{12}a_{21} = 0\,.$$

Das charakteristische Polynom ist damit

$$\left(a_{11}-\omega^2\right)\left(a_{22}-\omega^2\right) - a_{12}a_{21} = \left(\omega^2\right)^2 - \left(a_{11}+a_{22}\right)\omega^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ .$$

Seine Nullstellen, die Eigenwerte der Matrix **A**, sind also genau die, die wir auch ohne Matrixalgebra erhalten hatten – siehe Gleichungen (8) und (9).

Fazit: fasst man die Koeffizienten der rechten Seite unseres Systems von Differentialgleichungen (Gleichung (3) oben) zu einer Matrix **A** zusammen, dann sind deren Eigenwerte die Frequenzquadrate ω^2 der Normalmoden.

Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor. Den erhält man, indem man in Gleichung (20) für ω den entsprechenden Eigenwert einsetzt und das Gleichungssystem nach den Komponenten x und y des Vektors $\mathbf{x}$ auflöst. Das heißt, man löst

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \omega_{1,2}^2\,\mathbf{x}$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\omega_{1,2}^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\omega_{1,2}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem lautet in Komponentenschreibweise

$$(22)\qquad \begin{aligned} (a_{11}-\omega_{1,2}^2)\,x \qquad\qquad + a_{12}\,y &= 0 \\ a_{21}\,x + (a_{22}-\omega_{1,2}^2)\,y &= 0 \end{aligned}$$

und führt zu

$$\left[\left(a_{11}-\omega_{1,2}^2\right)\left(a_{22}-\omega_{1,2}^2\right) - a_{12}a_{21}\right]x = 0\ .$$

Da der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich Null ist – siehe Gleichung (8), kann man x beliebig wählen; y ist dann durch die erste oder zweite Gleichung in (22) festgelegt (beide Gleichungen sind äquivalent): Für den Quotient y/x bedeutet das im Fall ω_1 (Normalschwingung 1)

$$\left(\frac{y}{x}\right)_1 = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

und im Fall ω_2 (Normalschwingung 2)

$$\left(\frac{y}{x}\right)_2 = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}\ .$$

Diese Bedingungen sind genau die oben angegebenen Gleichungen (10) und (11).

5. Beispiele

5.1 Symmetrische Anordnung

Wir überprüfen unsere Rechnungen mit einem „Gespann" von Gleitern auf einer Luftkissenbahn. Die beiden Gleiter haben Massen von jeweils 0,185 kg. Geeignete Spiralfedern gibt es in der Physiksammlung, sie haben Federkonstanten von ungefähr 3 N/m. Die benutzen wir für die äußeren Federn, damit ist $D' = 3$ N/m (Wert gerundet). Die mittlere Feder setzt sich aus zwei parallel gespannten Spiralfedern zusammen. Sie hat also die Federkonstante $D = 6$ N/m. Ein Foto der Anordnung zeigt Abbildung 3.

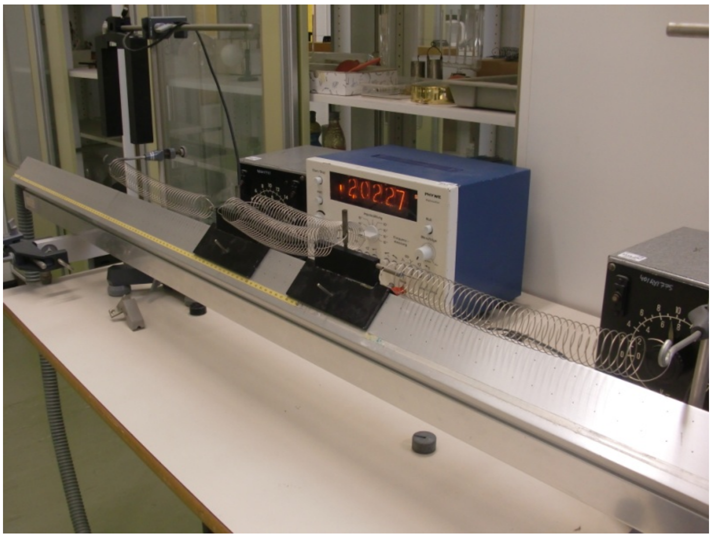

Abbildung 3 Experimenteller Aufbau (Symmetrische Anordnung)

Insgesamt sind 4 Federn im Einsatz. Da auch sie zum Teil beschleunigt werden, muss ihre Trägheit berücksichtigt werden. Dazu addieren wir, wie üblich, ein Drittel ihrer Masse zur Masse der Gleiter hinzu. Die Spiralfedern wiegen jeweils 17 g, jedem Gleiter werden 2 Federn zugeordnet. Dadurch erhöht sich die Masse eines Gleiters um 2 × 17/3 g = 11,4 g und beträgt schließlich 0,196 kg. Gerechnet wird mit dem gerundeten Wert $M = 0{,}2$ kg. Mit diesem Wert und den Federkonstanten $D' = 3$ N/m und $D = 6$ N/m erhalten wir $a_{11} = a_{22} = 45\ 1/\mathrm{s}^2$ und $a_{12} = a_{21} = -30\ 1/\mathrm{s}^2$. Die Matrix **A** (Matrixelemente und Quadrate der Kreisfrequenzen in der Einheit $1/\mathrm{s}^2$) wird damit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 45 & -30 \\ -30 & 45 \end{pmatrix} .$$

Ihre Eigenfrequenzen ergeben sich aus

$$\begin{aligned} (45 - \omega^2)(45 - \omega^2) - 900 &= 0 \\ \omega^4 - 90\,\omega^2 + 1125 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $\omega_1^2 = 15$ *und* $\omega_2^2 = 75$ (Einheit $1/\mathrm{s}^2$). Also

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{15}\,\frac{t}{s} + \varphi_1\right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{75}\,\frac{t}{s} + \varphi_2) .$$

Die zugehörigen Frequenzen ($f = \omega/2\pi$) sind $f_1 = 0{,}62$ Hz und $f_2 = 1{,}38$ Hz, wobei der größere Wert der Schwingung entspricht, bei der sich die Massen gegenläufig bewegen. Soweit die Theorie. Das Experiment ergibt $f_1 = 0{,}605 \pm 0{,}012$ Hz und $f_2 = 1{,}395 \pm 0{,}013$ Hz.

5.1 Unsymmetrische Anordnung

Wir ersetzen eine der Massen durch den anderthalbfachen Wert, rechnen also dieses Mal mit M_1 = 0,2 kg und M_2 = 0,3 kg (beide Werte gerundet). Die Spiralfedern werden nicht ausgetauscht, die Federkonstanten sind weiterhin D' = 3 N/m und D = 6 N/m. Wir erhalten damit die Matrixelemente $a_{11} = 45$, $a_{12} = -30$, $a_{21} = -20$ und $a_{22} = 30$ (alle in der Einheit 1/s²):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 45 & -30 \\ -20 & 30 \end{pmatrix} .$$

Die charakteristische Gleichung wird jetzt zu

$$(45 - \omega^2)(30 - \omega^2) - 600 = 0 ,$$

sie hat die Lösungen (Einheit 1/s²) $\omega_1^2 = 11{,}88$ *und* $\omega_2^2 = 63{,}12$ mit

$$\left(\frac{B}{A}\right)_1 = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{11{,}88 - 45}{-30} = 1{,}104$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)_2 = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{63{,}12 - 45}{-30} = -0{,}604 .$$

Damit wird

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}104 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{11{,}88}\,\frac{t}{s} + \varphi_1\right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}604 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{63{,}12}\,\frac{t}{s} + \varphi_2\right) .$$

Es gibt also trotz der unsymmetrischen Anordnung zwei Normalschwingungen, eine gleichphasige und eine gegenphasige Mode. Jedoch haben die relativen Amplituden keine „glatten" Werte. Die Theorie liefert für die Frequenzen jetzt $f_1 = 0{,}55$ Hz und $f_2 = 1{,}26$ Hz. Gemessen wird $f_1 = 0{,}544 \pm 0{,}005$ Hz und $f_2 = 1{,}287 \pm 0{,}043$ Hz.

6. Mehr als zwei Massen

Bei Ketten mit mehr als zwei Massen ändern wir die Bezeichnung der Vektorkomponenten: Wir ersetzen $x(t)$ und $y(t)$ durch $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und fügen nach Bedarf $x_3(t)$, $x_4(t)$, usw. hinzu. Für ein System mit 5 Körpern *gleicher* Masse M und 6 Federn *gleicher* Federkonstante D beispielsweise[2] lautet das zu lösende Gleichungssystem – in Erweiterung von Gleichung (1)

$$M \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2D & D & 0 & 0 & 0 \\ D & -2D & D & 0 & 0 \\ 0 & D & -2D & D & 0 \\ 0 & 0 & D & -2D & D \\ 0 & 0 & 0 & D & -2D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} .$$

Mit der Bezeichnung $\omega_0 := \sqrt{D/M}$ sind die Lösungen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0\sqrt{2-\sqrt{3}} &&= 0{,}5176\,\omega_0 \\ \omega_2 &= \omega_0 &&= 1{,}0000\,\omega_0 \\ \omega_3 &= \omega_0\sqrt{2} &&= 1{,}4142\,\omega_0 \\ \omega_4 &= \omega_0\sqrt{3} &&= 1{,}7321\,\omega_0 \\ \omega_5 &= \omega_0\sqrt{2+\sqrt{3}} &&= 1{,}9319\,\omega_0 \end{aligned}$$

Das Spektrum dieser Eigenfrequenzen (Kreisfrequenzen) zeigt Abbildung 4, die zugehörigen relativen Amplituden die nachfolgende Tabelle

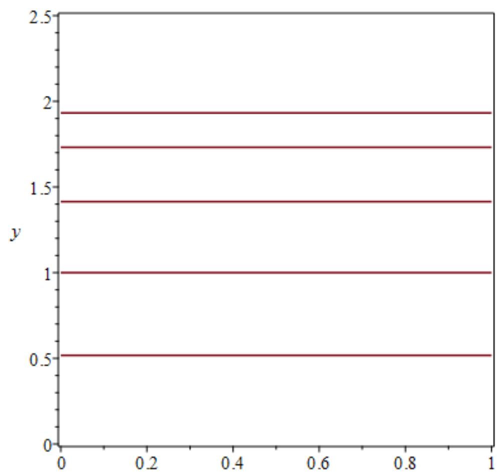

Abbildung 4 Spektrum der Eigenfrequenzen einer Kette aus 5 gleichen Massen

Tabelle

Nr	1	2	3	4	5
ω/ω_0	0,5176	1,0000	1,4142	1,7321	1,9319
Vektor der relativen Amplituden	$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Relative Amplituden der Kette mit 5 gleichen Massen

Literatur und Anmerkungen

[1] F. S. Crawford: *Berkeley Physics Course*, Band 3: *Waves*, Kapitel 1.4

[2] W. Demtröder: *Experimentalphysik 1* (*Mechanik und Wärme*), Kapitel 11